

## РАССЕЯНИЕ НА СИММЕТРИЧНЫХ ПО ОБРАЩЕНИЮ ВРЕМЕНИ-ПРОСТРАНСТВА $\Delta$ -ПОТЕНЦИАЛАХ

**Р.М. Галимзянов**

Физико-технический институт АН РУз, 100084 Ташкент, ул. Бодомзор йули 2<sup>Б</sup>, Узбекистан  
ravil@uzsci.net

Икки мавзум ва бир  $\delta$ -функциядан иборат ва $\pm$ -фаза симметрияли эрмит бўлмаган потенциалда чизиqli сочилиш квант масаласи ечилди. Чизиqli масаланинг хусусий шийматлари  $\delta$ -функция бўладиган параметрлар со $\delta$ аси топилди. Бу потенциалда солитон сочилиш ночиизиqli масаласи компьютерда кўриб читилди. Солитонни ўнгдан ёки чапдан келиши тенг кучли эмаслиги ва шунингдек, параметрларнинг баъзи аниqli шийматларида сочилиш чегарасида солитоннинг шакли саqlанган холда солитон амплитудасининг кучайиши ёки сўниши кўрсатилди.

Решена линейная квантовая задача рассеяния на PT (parity-time)-симметричном неэрмитовом потенциале, образованном из одного вещественного и двух чисто мнимых  $\delta$ -функций. Построена область значений параметров, при которых собственные значения линейной задачи чисто вещественные. Численно рассмотрено нелинейная задача рассеяния солитона на таком потенциале. Показаны неравнозначность падения солитона слева и справа и, при определенных значениях параметров, возникновение эффекта усиления и затухания амплитуды солитона после рассеяния с сохранением формы солитона.

A linear quantum problem on scattering from PT (parity-time) symmetrical potential formed of one real and two imaginary  $\delta$ -functions has been solved. The parameters values region where eigenvalues of the linear problem are purely real has been determined. Nonlinear problem of scattering a soliton from such potential has been numerically studied. It is shown that incidences of a soliton on the potential from left and from right are nonequivalent. At defined values of parameters after scattering the occurrence of amplification and dissipation of the soliton amplitude have been shown, with conservation of the soliton form.

Использование комплексных потенциалов имеет давнюю историю, например, они применялись и применяются в оптической модели ядра для феноменологического описания рассеяния нуклонов на ядрах с учетом их поглощения. В последнее время наблюдается взрыв интереса к взаимодействиям симметричных по обращению времени и пространства комплексных потенциалов, так называемых PT «parity-time symmetrical» потенциалов. Положительная мнимая часть в них может интерпретироваться как источник поля, а отрицательная соответственно как диссипация поля. Одной из причин их привлекательности является необычная динамика процессов в системах с PT-симметрией и возможность существования потенциалов с чисто вещественным спектром собственных значений, несмотря на комплексный характер потенциала взаимодействия.

Взрыв интереса к системам с PT-симметричными гамильтонианами, наблюдаемый в последние годы, был вызван работой Bender [1], где автор развил теорию возмущения для ангармонического осциллятора с чисто мнимой ангармоничностью (ей предшествовала важная работа Calicetti [2]). Бендер

рассмотрел гамильтонианы вида  $H = p^2 + x^2(ix)^{\epsilon}$ . Оказалось, что их спектр дискретен и вещественен, что является следствием РТ-симметрии. Это позволило ему усомниться в одном из постулатов квантовой механики о том, что операторы, ставящиеся в соответствие каждой физической величине, должны быть эрмитовыми, показав, что неэрмитовые операторы также могут обеспечить вещественность собственных значений.

По определению, РТ-симметричные комплексные операторы являются неэрмитовыми, и формулировка канонической квантовой механики, по мнению Бендера, должна быть расширена заменой условия эрмитовости на условие РТ-симметрии, что является предметом дискуссий (см., н-р, [3]). Интерес вызывает вопрос: являются ли РТ-симметричные гамильтонианы (те из них, которые имеют вещественный спектр) фундаментальными, т.е. какими-то физическими наблюдаемыми, или же комплексные гамильтонианы пригодны только для модельного описания диссипации и генерации полей? Характерно высказывание Бартона [4] в 1963 году – “неэрмитовый гамильтониан является неприемлемым не только потому, что он может приводить к комплексным собственным значениям, но, главным образом, потому, что он подразумевает неунитарную  $S$ -матрицу, в которой вероятность не сохраняется и путается физическая интерпретация”.

В настоящей работе мы рассматриваем одномерные системы и решаем простейшую линейную задачу рассеяния плоской волны на  $\delta$ -потенциалах в рамках уравнения Шредингера, раскрывающую основные особенности систем с РТ-симметрией, а также численно моделируем нелинейное рассеяние солитона Захарова-Шабата на таких потенциалах. Первая часть задачи рассеяния рассматривалась также в работе [5], где были найдены коэффициенты отражения и прохождения.

РТ-симметричные комплексные потенциалы представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} V^{PT}(x) &= V_S(x) + iV_A(x), \\ V_S(-x) &= V_S(x), \\ V_A(-x) &= -V_A(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V_S(x)$  и  $V_A(x)$  – соответственно пространственно симметричная и антисимметричная части потенциала. Далее под РТ-симметрией понимается инвариантность по отношению к одновременному обращению времени и изменению четности пространства. Действие соответствующих операторов  $\hat{T}$  и  $\hat{P}$  следующее:

$$\text{обращение времени} - \hat{T}x = x, \hat{T}p = -p, \hat{T}i = -i;$$

$$\text{изменение четности} - \hat{P}x = -x, \hat{P}p = -p,$$

где  $x, p$  – соответственно координата и импульс, а  $i$  – мнимая единица.

По определению, для произвольного РТ-симметричного собственного состояния  $\varphi_n(x)$  выполняется соотношение  $\hat{P}\hat{T}\varphi_n(x) = \varphi_n^*(-x) = \varphi_n(x)$ . Мы будем использовать РТ-симметричный потенциал вида

$$V^{PT}(x) = -i\beta\delta(x+d) - \alpha\delta(x) + i\beta\delta(x-d), \quad (1a)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция, вещественные параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d$  определяют силу потенциала и пространственные размеры ( $2d$  – расстояние между мнимыми потенциалами).

Стационарное одномерное уравнение Шредингера для нашей задачи запишется в виде

$$(-\psi_{xx}(x)/2) + [-i\beta\delta(x+d) - \alpha\delta(x) + i\beta\delta(x-d)]\psi(x) = k^2\psi(x)/2, \quad (2)$$

где нижние индексы в  $\psi_{xx}$  означают знак двойного дифференцирования по переменной  $x$ . Схематически рассеяние плоской волны можно представить как:

$$\exp(ikx) + B\exp(-ikx) \rightarrow \{\psi_k(x) \text{ в области взаимодействия}\} \rightarrow T\exp(ikx)$$

где  $\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$  – волна при  $x = -\infty$ , причем в этом выражении  $\exp(ikx)$  – падающая волна,  $B\exp(-ikx)$  – рассеянная волна, а  $T\exp(ikx)$  – прошедшая волна при  $x = +\infty$ , параметры  $B$  и  $T$  являются соответственно амплитудой рассеяния и амплитудой прохождения плоской волны, а  $k$  – волновой вектор. Решение  $\psi_k(x)$  в области взаимодействия является суммой волн  $\exp(\pm ikx)$  с неизвестными коэффициентами, которые определяются сшивкой решения и его производных в точках  $x = -d$ ,  $x = 0$  и  $x = +d$  с учетом разрывов производных в точках сшивки из-за сингулярного характера потенциалов. Проводя необходимые вычисления, получим следующие выражения для амплитуды рассеяния  $B$ :

$$B = \frac{-\alpha + (4\beta/k)\sin(kd)(\alpha\sin(kd) - k\cos(kd))(1 - (\beta/k))}{\alpha + ik + (4\beta/k)\sin(kd)(\alpha\sin(kd) - k\cos(kd))(\beta/k)\exp(2ikd)} \quad (3)$$

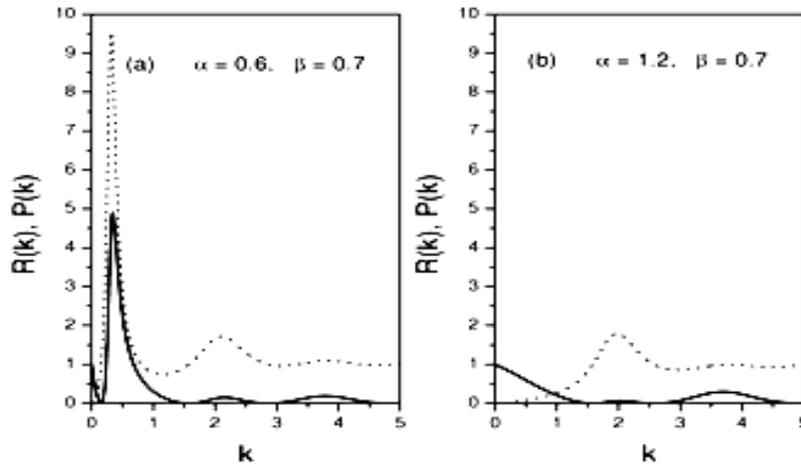
и амплитуды прохождения  $T$

$$T = \frac{ik}{\alpha + ik + (4\beta/k)\sin(kd)(\alpha\sin(kd) - k\cos(kd))(\beta/k)\exp(2ikd)}. \quad (4)$$

Введем коэффициенты отражения  $R = |B|^2$  и прохождения  $P = |T|^2$ . Для рассеяния на вещественных потенциалах всегда имеем равенство

$$|B|^2 + |T|^2 = R + P \equiv 1, \quad (5)$$

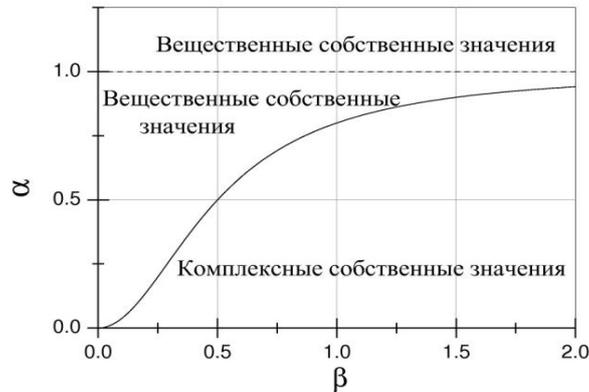
отражающее свойство упругого рассеяния. В общем случае для комплексных потенциалов этот закон не выполняется. На рис. 1 представлена зависимость коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $P$  от волнового импульса  $k$  при различных значениях силы потенциала  $\alpha$  и  $\beta$ .



**Рис. 1.** Зависимость коэффициентов отражения  $R(k)$  (сплошная линия) и прохождения  $P(k)$  (штриховая) при различных значениях параметров потенциала  $\alpha$  и  $\beta$ . Во всех случаях  $d = 1$ .

Видно, что для  $\alpha < 1$  рассеяние становится резонансным при малых  $k$  с усилением падающей и прошедшей волн. При  $\alpha > 1$  волна рассеивается без ярко выраженного резонанса. Коэффициент прохождения при больших импульсах для  $\alpha < 1$  близок к единице.

Дискретный спектр задачи определяется полюсами амплитуды рассеяния  $B$  уравнения (3). При этом физическим состояниям будут отвечать значения  $k$  с положительной реальной частью  $\text{Re } k \geq 0$ . На Рис. 2 в плоскости  $(\alpha, \beta)$  показаны области, где собственные значения являются чисто вещественными или комплексными.



**Рис. 2.** Области значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых собственное значение вещественно или комплексно. Во всех случаях  $d = 1$ .

Во второй части статьи с помощью компьютерного моделирования рассматривается рассеяние (эволюция) солитона на этом же комплексном потенциале, состоящем из  $\delta$ -функций. Для этого численно решается зависящее от времени нелинейное уравнение Шредингера в частных производных:

$$i\psi_t(x,t) = -\frac{1}{2}\psi_{xx}(x,t) + [-i\beta\delta(x+d) - \alpha\delta(x) + i\beta\delta(x-d)]\psi(x,t) - |\psi(x,t)|^2\psi(x,t), \quad (6)$$

где нижние индексы означают знаки дифференцирования по  $t$  и  $x$  соответственно.

В качестве начального пакета выбирался солитон Захарова-Шабата

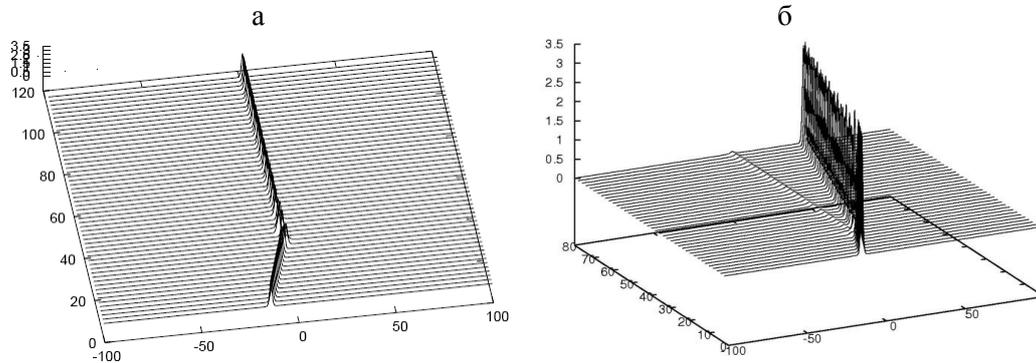
$$\psi(x,t=0) = \sqrt{2}A \operatorname{sech}[A(x-x_0)] \exp\left[\frac{1}{2}iv(x-x_0)\right], \quad (7)$$

где  $\sqrt{2}A$  – амплитуда солитона,  $x_0$  – начальное положение центра солитона,  $v$  – скорость солитона.

Ниже представлены результаты моделирования. На рис. 3 показана эволюция солитона при рассеянии на чисто вещественном притягивающем потенциале  $\alpha > 0$ ,  $\beta = 0$ .

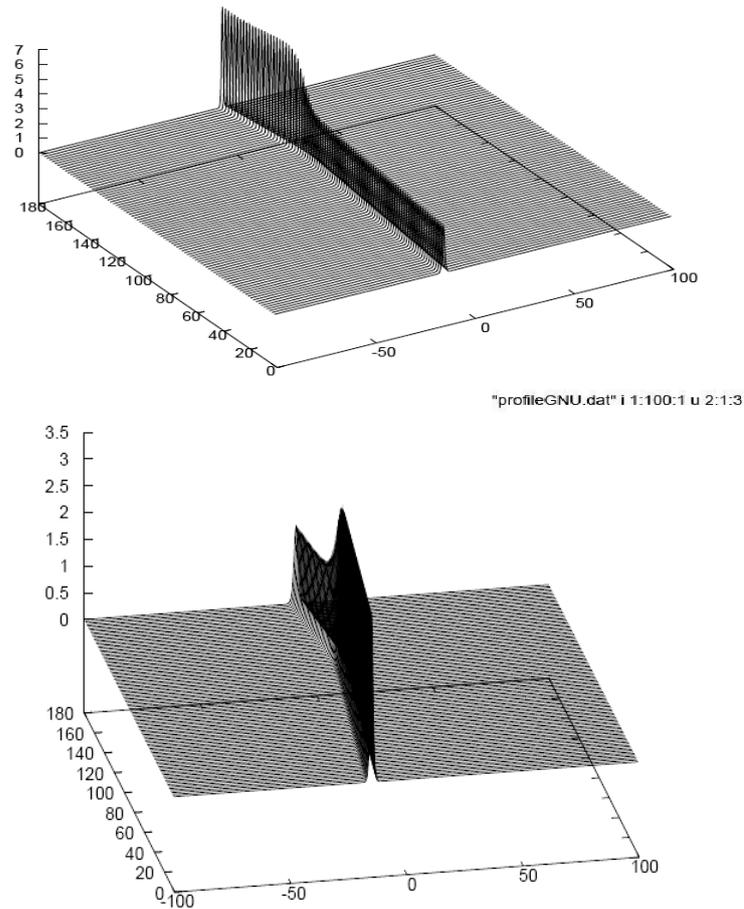
Видно, что при скорости  $v = 0.5$  падающий солитон полностью захватывается на притягивающем вещественном потенциале. При большей скорости  $v = 1$  коэффициент прохождения  $P$  становится отличным от нуля и основной солитон движется дальше, но с меньшей скоростью. На притягивающем потенциале остается захваченный солитон с малой амплитудой.

На следующем рис. 4 показано рассеяние солитона на нашем потенциале в случае, когда мнимые части потенциала отличны от нуля. Видно, что падающий солитон полностью захватывается на потенциале из-за малости скорости  $v$ , при этом амплитуда захваченного солитона либо усиливается, либо подавляется в зависимости от знака  $\beta$ , то есть падает ли солитон на потенциал слева или падает справа.



**Рис. 3.** Рассеяние солитона на вещественном потенциале ( $\beta = 0$ ) при  $\alpha = 0.6$ . Скорость падения  $v = 0.5$  (а) и  $v = 1.0$  (б).

"profileGNU.dat" i 1:100:1 u 2:1:3



**Рис. 4.** Рассеяние солитона на комплексном потенциале при  $\alpha = 0.5$ . Скорость падения  $\nu = 0.1$ . Мнимая часть потенциала  $\beta = -0.5$  (верхний) и  $\beta = +0.5$  (нижний).

Подобного рода задачи представляют большой интерес в нелинейной оптике для изучения распространения импульсов в активных оптических средах, где огибающая амплитуды световой волны  $E(x, t)$  эквивалентна  $\psi(x, t)$  из уравнения (6), в котором члены с  $-i\beta$  и  $+i\beta$  соответствуют соответственно усилению и затуханию световой волны в среде.

Работа выполнена в рамках гранта фундаментальных исследований Ф2-ФА-0-97004.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С.М. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 4243 (1998).
2. E. Caliceti, S. Graffi, and M. Maioli, Commun. Math. Phys. **75**, 51 (1980).
3. A. Mostafazadeh, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 7081 (2003).
4. G. Barton. Introduction to Advanced Field Theory (John Wiley & Sons, New York, 1963).
5. H.F. Jones, Phys. Rev. D **76**, (2007).

Р.М. Галимзянов. Рассеяние на симметричных по обращению времени-пространства  $\delta$ -потенциалах

R.M. Galimzyanov. Scattering on PT (parity-time) symmetrical  $\delta$ -function potential